Subject Code J-277

Seat No. | | | | | | | |

M

DATE : 24/06/2026

Time : 11.00 - 2.00

SUBJECT : MATHEMATICS & STATISTICS (ARTS & SCIENCE) (40)

DURATION : 3 Hours **TOTAL PAGES : 8** **TOTAL MARKS : 80**

सूचना :

प्रश्नपत्रिका एकूण चार विभागांत विभागलेली आहे.

(i) विभाग अ – प्रश्न क्रमांक १ मध्ये ८ बहुपर्यायी प्रश्न प्रत्येकी २ गुणांचे आहेत.
प्रश्न क्रमांक २ मध्ये एकूण ४ अतिलघुत्तरी प्रश्न प्रत्येकी १ गुणाचे आहेत.

(ii) विभाग ब – प्रश्न क्रमांक ३ ते १४ असे १२ लघुत्तरी प्रश्न प्रत्येकी २ गुण आहेत.
(कोणतेही ८ प्रश्न सोडवा.)

(iii) विभाग क – प्रश्न क्रमांक १५ ते २६ असे १२ लघुत्तरी प्रश्न प्रत्येकी ३ गुणांचे आहेत.
(कोणतेही ८ प्रश्न सोडवा.)

(iv) विभाग ड – प्रश्न क्रमांक २७ ते ३४ असे ८ दीर्घोत्तरी प्रश्न प्रत्येकी ४ गुणांचे आहेत.
(कोणतेही ५ प्रश्न सोडवा.)

(v) लॉग टेबलच्या वापरास अनुमती आहे. गणनयंत्राचा वापर करण्यास अनुमती नाही.

(vi) उजव्या बाजूस दिलेल्या संख्या प्रश्नांचे पूर्ण गुण दर्शवितात.

(vii) आलेख कागदाचा वापर अनिवार्य नाही. फक्त कच्चा आलेख काढणे अपेक्षित आहे.

(viii) बहुपर्यायी प्रश्नांचे मूल्यमापन हे पहिल्या प्रयत्नात सोडविलेल्या प्रश्नांसाठीच करण्यात येईल.

(ix) प्रत्येक विभागाची सुरुवात नवीन पानावर करावी.

विभाग - अ

प्र. १. प्रत्येक उपप्रश्नासाठी खाली दिलेल्या पर्यायी उत्तरातून योग्य तो पर्याय निवडून खालील प्रश्नांची उत्तरे लिहा : १६

(i) जर $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ असेल तर खालील कोणते विधान सत्य नाही?

(a) $\exists\ x \in A$, ज्याप्रमाणे $x + 3 = 8$

(b) $\exists\ x \in A$, ज्याप्रमाणे $x + 2 < 9$

(c) $\forall\ x \in A,\ x+6 \geq 9$

(d) $\forall\ x \in A,\ x+5 \leq 10$ (२)

(ii) $\sin\left[\sin^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - 3\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]$ ची किंमत = ...

(a) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ (b) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

(c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (d) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (२)

(iii) जर $\hat{p}, \hat{q}$ व $\hat{r}$ या एकक सदिश राशी एकमेकांना लंब असून एक दक्षिण हस्त त्रिकूट बनवत असतील तर $\hat{p}\cdot(\hat{q}\times\hat{r}) + \hat{q}\cdot(\hat{p}\times\hat{r}) + \hat{r}\cdot(\hat{p}\times\hat{q})$ ची किंमत = ...

(a) -2 (b) 0

(c) 1 (d) 3 (२)

(iv) एक रेषा बिंदू $A\,(3, 4, -1)$ आणि बिंदू $B\,(2, -1, 3)$ मधून जात असेल तर त्या रेषेचे कार्तेशियन समीकरण = ...

(a) $\frac{x+3}{1} = \frac{y-4}{5} = \frac{z+1}{-4}$ (b) $\frac{x-3}{-1} = \frac{y-4}{-5} = \frac{z+1}{-4}$

(c) $\frac{x-3}{-1} = \frac{y-4}{-5} = \frac{z+1}{4}$ (d) $\frac{x-3}{-1} = \frac{y-4}{5} = \frac{z+1}{-4}$ (२)

(v) जर $y = \log_x a$ असेल तर $\frac{dy}{dx} =$ _____

(a) $\frac{-\log a}{x(\log x)^2}$ (b) $x \log a$

(c) $-\frac{1}{\log_x a}$ (d) $\frac{1}{x \log a}$ (२)

(vi) जर $f(x) = \frac{\sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}}$ आणि $g(x) = e^{\sin^{-1} x}$ तर $\int f(x) \cdot g(x) dx =$ _____

(a) $e^{\sin^{-1} x}(1 - \sin^{-1} x) + c$ (b) $e^{\sin^{-1} x}(\sin^{-1} x - 1) + c$

(c) $e^{\sin^{-1} x}(\sin^{-1} x + 1) + c$ (d) $e^{\cos^{-1} x}(\cos^{-1} x - 1) + c$ (२)

(vii) रेषा $y = 2x$, $X-$ अक्ष आणि रेषा $x = -1$ आणि $x = 4$ ने व्यापलेल्या भागाचे क्षेत्रफळ = ... (चौ. एकक)

(a) 15 (b) 17

(c) 16 (d) 14 (२)

(viii) द्विपद वितरणामध्ये $E(X) = 6$, $\text{Var}(X) = 4.2$ असेल तर n ची किंमत = ...

(a) 22 (b) 24

(c) 20 (d) 26 (२)

प्र. २. खालील प्रश्नांची उत्तरे लिहा : ४

(i) $p \wedge t$ या विधानाचे दुहेरी (dual) लिहा. (१)

(ii) XZ प्रतलापासून बिंदू $(3, -5, 6)$ चे अंतर किती? (१)

(iii) एका कणाचे (particle) t वेळेतील विस्थापन $S = 3t^2 + 4t + 1$ आहे तर या कणांचा t वेळेतील वेग काढा. (१)

(iv) $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^{\frac{5}{2}} = \sqrt[3]{\frac{dy}{dx}}$ या विकलनीय समीकरणाचा क्रम (order) लिहा. (१)

विभाग - ब

खालील दिलेल्या प्रश्नांमधून कोणतेही आठ प्रश्न सोडवा : १६

प्र. ३. $(\sim p \wedge q) \vee (p \wedge \sim r)$ या विधानाचा विद्युत परिपथ (switching circuit) काढा. (२)

प्र. ४. व्यूह (matrix) $\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}$ च्या सहगुणकाचा (co-factor) व्यूह (matrix) काढा. (२)

प्र. ५. $\cos 5\theta = \frac{1}{2}$ या समीकरणाची सामान्य उकल (general solution) काढा. (२)

प्र. ६. $3x^2 + kxy + 2y^2 = 0$ हे समीकरण $2x + y = 0$ ही एक रेषा दाखवत असेल तर 'k' ची किंमत काढा. (२)

प्र. ७. जर A, B, C या बिंदूंचे स्थान सदिश (position vectors) $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ असतील आणि $10\bar{a} = 7\bar{b} + 3\bar{c}$ तर बिंदू C हा रेषाखंड AB ला कोणत्या गुणोत्तरात दुभागेल? (२)

प्र. ८. $\bar{r} = (\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}) + \lambda(2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k})$ व $\bar{r} = (\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}) + \mu(\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k})$ या दोन रेषांमधील कोन (angle) काढा. (२)

प्र. ९. फल (function) $f(x) = x - \frac{1}{x}, x \in R, x \neq 0$ हे चढते किंवा उतरते फल (increasing or decreasing function) आहे का ते तपासा. (२)

प्र. १०. सोडवा : $\int_{-1}^{1} |x|\, dx$ (२)

प्र. ११. सोडवा : $\int x \log x \; dx$ (२)

प्र. १२. वक्र (curve) $x^2 + y = 0$, X – अक्ष आणि रेषा $x = 1$, $x = 4$ यांनी व्यापलेल्या भागाचे क्षेत्रफळ काढा. (२)

प्र. १३. X या यादृच्छिक चलाचे (random variable) संभाव्य वितरण खालील प्रमाणे

$X = x$	0	1	2	3	4
$P(X = x)$	0.1	k	$2k$	$2k$	k

(i) k (ii) $F(2)$ काढा. (२)

प्र. १४. सोडवा : $\int \frac{e^x(1+x)}{\cos^2(xe^x)}dx$ (२)

विभाग - क

खालीलपैकी कोणतेही <u>आठ</u> प्रश्न सोडवा : २४

प्र. १५. $[(p \vee q) \wedge \sim p] \wedge \sim q$ या विधान नमुना (statement pattern) हा पुनरुक्ती (tautology), विरोधाभास (contradiction) किंवा दोन्ही ही नाहीत (contingency) हे सत्यता सारणीच्या साहाय्याने शोधा. (३)

प्र. १६. सिद्ध करा :

$$\sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) + \cos^{-1}\left(\frac{12}{13}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{56}{65}\right)$$ (३)

प्र. १७. त्रिकोण ABC मध्ये, जर $a = 10$, $b = 8$ $c = 6$ असेल तर

(i) $\sin\left(\frac{C}{2}\right)$ (ii) $\cos\left(\frac{B}{2}\right)$ची किंमत काढा. (३)

प्र. १८. $A(1, 2, 1)$, $B(2, -3, 4)$, $C(3, 4, -5)$ $D(2, 3, -2)$ हे चार बिंदू एक प्रतलीय आहेत का? तुमचे मत सिद्ध करा. (३)

प्र. १९. $\frac{x}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{2}$ आणि $\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{2}$ या दोन समांतर रेषांतील अंतर काढा. (३)

प्र. २०. बिंदू $A(2,1,1), B(0,2,3)$ आणि $C(4,5,6)$ या बिंदूंतून जाणाऱ्या प्रतलाचे सदिश समीकरण (vector equation) काढा. (३)

प्र. २१. जर $y = \log\left[\frac{x+\sqrt{x^2+a^2}}{\sqrt{x^2+a^2}-x}\right]$ तर $\frac{dy}{dx}$ काढा. (३)

प्र. २२. 36 से.मी. लांबीची तार वाकवून आयत तयार केला. जर त्या आयताचे क्षेत्रफळ सर्वाधिक (maximum) असल्यास त्या आयताची परिमाणे शोधा. (३)

प्र. २३. फल (function) $f(x) = x^2 - 5x + 9, x \in [1,4]$ हे रोल्स (Rolle's) प्रमेय (theorem) चे समाधान करते हे सत्यापित (verify) करा. (३)

प्र. २४. $x\frac{dy}{dx} - \sqrt{x^2+y^2} = y$ हे विकलनीय समीकरण सोडवा. (३)

प्र. २५. एका सतत अनिर्बंध चलाचे (continuous random variable) संभाव्य घनत्व फल (p.d.f.) जर

$f(x) = \frac{x}{8}$; $0 < x < 4$

$= 0$; अन्यथा

(i) संचित वारंवारिता फलन रूपात लिहा (expression for c.d.f. of X)

(ii) $F(x) = ?$ जेव्हा $x = 0.5$ आणि $x = 5$ (३)

प्र. २६. एका यादृच्छिक चल (random variable) Xचे संभावनीयता राशी फलन (p.m.f.) हे

$P(X = x) = {}^4C_x \left(\frac{5}{9}\right)^x \left(\frac{4}{9}\right)^{4-x}$; $x = 0,1,2,3,4$

$= 0$; अन्यथा

तर $E(X)$ आणि Var (X) काढा. (३)

विभाग - ड

खालीलपैकी कोणतेही <u>पाच</u> प्रश्न सोडवा : **२०**

प्र. २७. व्यूह (matrix) $\begin{bmatrix} -4 & -3 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ चा व्यस्त (inverse) काढा. (४)

प्र. २८. जर $h^2 - ab \geq 0$ असेल व x आणि y मधील दोन कोटीचे (second degree) एक जिनसीय (homogeneous) समीकरण जसे की, $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ मूळ बिंदूतून जाणाऱ्या रेषांच्या जोडीचे (pair of lines) प्रतिनिधित्व करते, हे सिद्ध करा. (४)

प्र. २९. जर $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ हे तीन नैकप्रतलिय (non coplanar) सदिश राशी असतील तर $\bar{r}$ हा सदिश अंतराळामध्ये (in a space) $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ च्या रेखीय संयोजन (linear combination) च्या एका व एकाच रूपात मांडता येतो, हे सिद्ध करा. (४)

प्र. ३०. खाली दिलेल्या रेषीय समीकरणांची (L.P.P.) आलेख पद्धतीच्या (graphical method) साहाय्याने किमान (minimum) किंमत काढा जसे

Minimize : $z = 8x + 10y$

अटी : $2x + y \geq 7$

$2x + 3y \geq 15$

$x \geq 0$

$y \geq 2$ (४)

प्र. ३१. जर $x = f(t)$ आणि $y = g(t)$ हे t चे विकलनीय फलन असतील म्हणून y हे x चे विकलनीय फलन असेल आणि $\frac{dx}{dt} \neq 0$ तर सिद्ध करा की,

$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$, त्यावरून

$\frac{dy}{dx}$ काढा जेव्हा $x = \sin t \quad y = \cos t.$ (४)

प्र. ३२. सोडवा : $\int \frac{2}{3+2\sin^2 x+5\cos^2 x}dx$ (४)

प्र. ३३. सिद्ध करा की,

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx, \text{ जर } f(x) \text{ हे सम फल}$$

$$= 0, \text{ जर } f(x) \text{ हे विषम फल.}$$ (४)

प्र. ३४. न्यूटनच्या नियमानुसार एका वस्तूस (body) 100° C वरून 60° C पर्यंत थंड होण्यास 20 मिनिटे लागतात जर वातावरणीय तापमान (surrounding temperature) 20° C असेल तर त्या वस्तूचे (body) तापमान 40° C होण्यास किती वेळ लागेल? (४)

◆◆◆