DAY — 09 SEAT NUMBER | | | | | | | |

2026	II	21	1100	J-166	(M)

MATHEMATICS & STATISTICS (40)
(ARTS & SCIENCE)

Time : 3 Hrs. **(8 Pages)** **Max. Marks : 80**

सूचना :

प्रश्नपत्रिका एकूण ***चार*** *विभागांत विभागलेली आहे.*

(१) ***विभाग अ*** – *प्रश्न क्रमांक* **१** *मध्ये* ***८ बहुपर्यायी प्रश्न प्रत्येकी २ गुणांचे*** *आहेत.*

प्रश्न क्रमांक **२** *मध्ये* ***एकूण ४ अतिलघुत्तरी प्रश्न प्रत्येकी १ गुणाचे*** *आहेत.*

(२) ***विभाग ब*** – *प्रश्न क्रमांक* **३** *ते* **१४** *असे* ***१२ लघुत्तरी प्रश्न प्रत्येकी २ गुण*** *आहेत. (कोणतेही ८ प्रश्न सोडवा.)*

(३) ***विभाग क*** – *प्रश्न क्रमांक* **१५** *ते* **२६** *असे* ***१२ लघुत्तरी प्रश्न प्रत्येकी ३ गुणांचे*** *आहेत. (कोणतेही ८ प्रश्न सोडवा.)*

(४) ***विभाग ड*** – *प्रश्न क्रमांक* **२७** *ते* **३४** *असे* ***८ दीर्घोत्तरी प्रश्न प्रत्येकी ४ गुणांचे*** *आहेत. (कोणतेही ५ प्रश्न सोडवा.)*

(५) *लॉग टेबलच्या वापरास अनुमती आहे. गणनयंत्राचा वापर करण्यास अनुमती नाही.*

(६) *उजव्या बाजूस दिलेल्या संख्या प्रश्नांचे पूर्ण गुण दर्शवितात.*

(७) *आलेख कागदाचा वापर अनिवार्य नाही. फक्त कच्चा आलेख काढणे अपेक्षित आहे.*

(८) *बहुपर्यायी प्रश्नांचे मूल्यमापन हे पहिल्या प्रयत्नात सोडविलेल्या प्रश्नांसाठीच करण्यात येईल.*

(९) *प्रत्येक विभागाची सुरुवात नवीन पानावर करावी.*

विभाग - अ

प्र. १. प्रत्येक उपप्रश्नासाठी खाली दिलेल्या पर्यायी उत्तरातून योग्य तो पर्याय निवडून खालील प्रश्नांची उत्तरे लिहा : **[१६]**

(i) $\sim p \rightarrow q$ या विधानाच्या विरोधाभासाचा (contrapositive) व्यत्यास (converse) ..... आहे.

(a) $q \rightarrow p$

(b) $\sim q \rightarrow p$

(c) $p \rightarrow \sim q$

(d) $\sim q \rightarrow \sim p$ (२)

(ii) जर $A = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, तर A या सारणीची संलग्नीत सारणी (adjoint of matrix) ..... आहे.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ (२)

(iii) जर $\tan^{-1}(2x) + \tan^{-1}(3x) = \frac{\pi}{4}$, तर $x =$ ———

(a) -1

(b) $\frac{1}{6}$

(c) $\frac{1}{3}$

(d) $\frac{3}{2}$ (२)

SEAT NUMBER | | | | | | | |

(iv) रेषा $\bar{r} = (\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}) + \lambda(\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})$ आणि प्रतल $\bar{r} \cdot (2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) = 8$ यामधील कोन ——— आहे.

(a) $\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)$ (b) $\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

(c) $\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ (d) $\sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ (२)

(v) जर $y = \sec(\tan^{-1} x)$ तर $x = 1$ या किंमतीसाठी $\frac{dy}{dx}$ = ——— आहे.

(a) $\frac{1}{2}$ (b) 1

(c) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (d) $\sqrt{2}$ (२)

(vi) $x = 1.99$ या किंमतीसाठी $f(x) = x^3 - 3x + 5$ या फलाचे अंदाजे मूल्य ——— आहे.

(a) 6.09 (b) 6.91

(c) 7.09 (d) 7.91 (२)

(vii) $\int_1^2 \frac{1}{x^2} \cdot e^{\frac{1}{x}} dx$ = ———

(a) $\sqrt{e} + 1$ (b) $\sqrt{e} - 1$

(c) $\sqrt{e}(\sqrt{e} - 1)$ (d) $\frac{\sqrt{e} - 1}{e}$ (२)

(viii) जर $f(x) = \frac{x+2}{18}$, जेव्हा $-2 < x < 4$

$= 0$, अन्यथा

हे X या संतत यादृच्छिक चलाचे (c.r.v.) संभाव्यता घनताफल (p.d.f.) आहे, तर $P(|X| < 1)$ = ———.

(a) $\frac{1}{9}$ (b) $\frac{2}{9}$

(c) $\frac{1}{27}$ (d) $\frac{2}{27}$ (२)

प्र. २. **खालील प्रश्नांची उत्तरे लिहा :** **[४]**

(i) $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$ ची द्वैती (dual) लिहा. (१)

(ii) सोडवा : $\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)+2\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ (१)

(iii) सोडवा : $\int \frac{2x}{1+x^2}dx$ (१)

(iv) $(y''')^2+3(y'')^3+3xy'+5y=0$

या विकलनीय समीकरणाची (differential equation) कोटी (degree) लिहा. (१)

विभाग - ब

खालील दिलेल्या प्रश्नांमधून कोणतेही <u>आठ</u> प्रश्न सोडवा : **[१६]**

प्र. ३. $(\sim p \wedge q) \vee (p \wedge \sim r)$ या विधानाचे विद्युत परिपथ (switching circuit) तयार करा. (२)

प्र. ४. ΔABC मध्ये, सिद्ध करा

$a(b\cos C - c\cos B) = b^2 - c^2$ (२)

प्र. ५. $4\cos^2\theta = 3$ या समीकरणाची व्यापक उकल (general solution) काढा. (२)

प्र. ६. जर $x^2+kxy-3y^2=0$ या समीकरणाने प्रदर्शित केलेल्या रेषांच्या चढांची बेरीज त्यांच्या गुणाकाराच्या दुप्पट आहे, तर k ची किंमत काढा. (२)

प्र. ७. सदिश (vector) $\bar{a}=3\hat{i}+2\hat{j}+9\hat{k}$ आणि $\bar{b}=\hat{i}+p\hat{j}+3\hat{k}$ हे एकमेकांना लंब आहेत तर p ची किंमत काढा. (२)

प्र. ८. $A(1,2,3)$ आणि $B(2,3,4)$ या बिंदूमधून जाणाऱ्या रेषेचे सदिश समीकरण (vector equation) काढा. (२)

SEAT NUMBER | | | | | | | |

प्र. ९. जर $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$, तर $\frac{dy}{dx}$ ची किंमत काढा. (२)

प्र. १०. जर $y=x^3+7x^2-2x-9$, तर $\frac{d^2y}{dx^2}$ ची किंमत काढा. (२)

प्र. ११. तपासा की, फल $f(x)=x^3+6x^2+12x-7$ सर्व वास्तवसंख्यांसाठी ($x \in R$) वृद्धीफल (increasing function) आहे की घटणारे फल (decreasing function) आहे. (२)

प्र. १२. एक दगड स्थिर तळ्यामध्ये टाकल्यानंतर वर्तुळाकार लाटा तयार होतात. लाटेची त्रिज्या वाढण्याचा दर 3 cm/sec आहे. जर त्रिज्या 8 cm असेल तर लाटांनी बंदिस्त क्षेत्रफळाच्या वाढीचा दर काढा. (२)

प्र. १३. सोडवा $\int \sqrt{1+\sin 2x}\cdot dx$ (२)

प्र. १४. जेव्हा $X \sim B(n,p)$, जर $n=10, E(X)=8$ तर Var(X) काढा. (२)

विभाग - क

खालीलपैकी कोणतेही <u>आठ</u> प्रश्न सोडवा : **[२४]**

प्र. १५. $(p \wedge q) \wedge (\sim p \vee \sim q)$ हे विधान (statement pattern) सर्वत: सत्य (tautology) किंवा परस्परविरोध (contradiction) किंवा कॉन्टींजेंसी (contingency) आहे का ते तपासा. (३)

प्र. १६. जर ΔABC मध्ये $A=45^\circ$ आणि $B=60^\circ$ तर त्रिकोणाच्या बाजूंचे गुणोत्तर (ratio) काढा. (३)

प्र. १७. जर त्रिकोणाचे $A(3,1,4)$ आणि $B(-4,5,-3)$ हे दोन शिरोबिंदू आहेत, आणि $G(-1,2,1)$ हा मध्यसंपात (centroid) आहे. तर त्रिकोणाच्या तिसऱ्या शिरोबिंदू C चे निर्देशक काढा. (३)

प्र. १८. ΔABC च्या बाजू BC, CA, AB चे अनुक्रमे D, E, F मध्यबिंदू आहेत. तर सिद्ध करा की $\overline{AD}+\overline{BE}+\overline{CF}=\overline{0}$. (३)

प्र. १९. दाखवा की रेषा $\bar{r}=(\hat{i}+\hat{j}-\hat{k})+\lambda(2\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k})$ आणि $\bar{r}=(4\hat{i}-3\hat{j}+2\hat{k})+\mu(\hat{i}-2\hat{j}+2\hat{k})$ हे एकमेकांना छेदतात. (३)

प्र. २०. $\bar{r}=(\hat{i}-\hat{j})+\lambda(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})+\mu(\hat{i}-2\hat{j}+3\hat{k})$ या प्रतलाचे कार्तेशियन समीकरण (cartesian equation) काढा. (३)

प्र. २१. जर $y=f(u)$ हे u चे विकलनीय फल (differentiable function) आहे आणि $u=g(x)$ हे x चे विकलनीय फल (differentiable function) आहे तर सिद्ध करा की y हे x चे विकलनीय फल आहे आणि $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}$ (३)

प्र. २२. $f(x)=\log x$, या फलाच्या [1, e] या अंतराळात (interval) LMVT ची पडताळणी करा. (३)

प्र. २३. सोडवा $\int\frac{\sin x}{\sin 3x}dx$ (३)

प्र. २४. $3e^x\tan y\,dx+(1+e^x)\sec^2 y\;dy=0$ हे विकलनीय समीकरण (differential equation) सोडवा. (३)

प्र. २५. निष्पक्ष फासा (fair die) फेकला (thrown) असता, X ही संख्या सर्वात वरच्या पृष्ठभागावर मिळणारी संख्या आहे, तर $E(X)$ आणि विचरण (Variance) $V(X)$ ची अपेक्षित किंमत काढा. (३)

प्र. २६. दोन फाशांची जोडी 4 वेळा फेकल्यास, जर दोन्ही फाशांवरील अंक दुहेरी (doublet) असल्यास यशस्वी होण्याची संभाव्यता मिळते. तर दोन वेळा यशस्वी होण्याची संभाव्यता काढा. (३)

SEAT NUMBER | | | | | | | |

विभाग - ड

खालीलपैकी कोणतेही <u>पाच</u> प्रश्न सोडवा : **[२०]**

प्र. २७. जर $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$ तर सिद्ध करा $A\cdot(\text{adj } A)=(\text{adj } A)\cdot A=|A|\cdot I$ (४)

प्र. २८. दाखवा की x आणि y चलातील कोटी दोन असणारे एकजिनसी समीकरण, अर्थात $ax^2+2hxy+by^2=0$, हे समीकरण जर $h^2-ab\geq 0$ असेल तर आरंभबिंदूतून जाणाऱ्या रेषांची जोडी दर्शविते. (४)

प्र. २९. जर अवकाशामध्ये (space) $A(\bar{a})$ आणि $B(\bar{b})$ हे दोन बिंदू आहेत व रेषाखंड AB वरील $R(\bar{r})$ बिंदू त्या रेषाखंडास $m:n$ या गुणोत्तरात (ratio) अंतर्गत (internally) विभागत (dividing) असेल तर सिद्ध करा

$$\bar{r}=\frac{m\bar{b}+n\bar{a}}{m+n}$$ (४)

प्र. ३०. खालील रेषीय प्रयोजनात्मक प्रश्न (L.P.P.) आलेख पद्धतीने सोडवा.

किमान (minimize) : $z=5x+2y,$

अटी (subjective) : $5x+y>10$

$x+y\geq 6$

$x\geq 0$

$y\geq 0$ (४)

प्र. ३१. सोडवा : $\int\frac{3x^2+4x-5}{(x^2-1)(x+2)}\cdot dx$ (४)

प्र. ३२. सिद्ध करा :

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b f(a+b-x)\cdot dx$$

यावरून $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\sin^2 x\cdot dx$ सोडवा. (४)

प्र. ३३. वर्तुळ $x^2 + y^2 = 1$ आणि रेषा $x + y = 1$ यामधील पहिल्या चरणातील बंदिस्त भागाचे (enclosed region) क्षेत्रफळ काढा. (४)

प्र. ३४. खालील विकलनीय समीकरण सोडवा

$$x^2 \cdot \frac{dy}{dx} = x^2 + xy + y^2 \quad (४)$$

◆◆◆