DAY — **09** SEAT NUMBER | | | | | | |

2025	II	22	1100	J-315	(H)

MATHEMATICS & STATISTICS (40)
(ARTS & SCIENCE)

Time : 3 Hrs. **(8 Pages)** **Max. Marks : 80**

सामान्य सूचनाएँ :

*प्रश्न पत्र को **चार** विभागों में विभाजित किया गया है।*

*(१) **विभाग अ :** प्रश्न क्रमांक **१** में **आठ** बहुविकल्पीय प्रकार के उपप्रश्न हैं। प्रत्येक को **दो** अंक दिए गए हैं।*

*प्रश्न क्रमांक **२** में **चार** उपप्रश्न हैं। प्रत्येक को **एक** अंक दिया गया है।*

*(२) **विभाग ब :** इस विभाग में **बारह** लघुत्तरीय प्रकार के प्रश्न हैं। प्रत्येक प्रश्न को **दो** अंक दिए गए हैं। (किन्हीं **आठ** प्रश्नों को हल करना है।)*

*(३) **विभाग क :** इस विभाग में **बारह** लघुत्तरीय प्रकार के प्रश्न हैं। प्रत्येक प्रश्न को **तीन** अंक दिए गए हैं। (किन्हीं **आठ** प्रश्नों को हल करना है।)*

*(४) **विभाग ड :** इस विभाग में **आठ** दीर्घउत्तरीय प्रकार के प्रश्न हैं। प्रत्येक प्रश्न को **चार** अंक दिए गए हैं। (किन्हीं **पाँच** प्रश्नों को हल करना है।)*

(५) लॉग सारिणी का उपयोग किया जा सकता है। परिगणक (calculator) का उपयोग नहीं किया जा सकता।

(६) दाहिनी ओर दिए गए अंक प्रश्नों के पूर्णांक हैं।

(७) *आलेख पत्र के उपयोग की आवश्यकता नहीं है। सिर्फ़ कच्ची आलेख आकृति अपेक्षित है।*

(८) *बहुविकल्पीय प्रश्नों के मूल्यांकन हेतु पहले लिखे गए उत्तर को ही परीक्षण में ग्राह्य माना जाएगा।*

(९) *प्रत्येक नए विभाग के प्रश्नों का उत्तर नए पन्नों से प्रारंभ कीजिए।*

विभाग - अ

प्र. १. **प्रत्येक प्रश्न के लिए दिए गए विकल्पों में से सही उत्तर चुनकर प्रश्न का उत्तर लिखिए :** **[१६]**

(i) यदि $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ हो तो निम्नलिखित में से कौनसा सत्य नहीं है (not true) ?

(a) $\exists x \in A$ इस प्रकार कि $x + 3 = 8$

(b) $\exists x \in A$ इस प्रकार कि $x + 2 < 9$

(c) $\forall x \in A,\ x + 6 \geq 9$

(d) $\exists x \in A$ इस प्रकार कि $x + 6 < 10$ (२)

(ii) ΔABC में $(a + b) \cdot \cos C + (b + c) \cos A + (c + a) \cdot \cos B$ = ______

(a) $a - b + c$

(b) $a + b - c$

(c) $a + b + c$

(d) $a - b - c$ (२)

(iii) यदि $|\bar{a}| = 5,\ |\bar{b}| = 13$ तथा $|\bar{a} \times \bar{b}| = 25$ हो तो $|\bar{a} \cdot \bar{b}|$ = ______

(a) 30 (b) 60

(c) 40 (d) 45 (२)

(iv) $4\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k}$ स्थिति सदिश रखने वाले बिंदु से गुजरने वाली तथा सदिश $-2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$ के समांतर (parallel) रेखा का सदिश समीकरण ——— होगा।

(a) $(4\hat{i}-\hat{j}-2\hat{k})+\lambda(-2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k})$

(b) $(4\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k})+\lambda(2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k})$

(c) $(4\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k})+\lambda(-2\hat{i}-\hat{j}-\hat{k})$

(d) $(4\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k})+\lambda(-2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k})$ (२)

(v) माना कि (let) $f(1)=3,\ f'(1)=-\frac{1}{3},\ \ g(1)=-4$ तथा $g'(1)=-\frac{8}{3}$ हो तो $\sqrt{[f(x)]^2+[g(x)]^2}$ का x के सापेक्ष अवकलन $x=1$ पर ——— होगा।

(a) $-\frac{29}{25}$ (b) $\frac{7}{3}$

(c) $\frac{31}{15}$ (d) $\frac{29}{15}$ (२)

(vi) यदि एक द्विपद बंटन (binomial distribution) का माध्य (mean) तथा विचरण (variance) क्रमश: 18 तथा 12 हो तो n = ——— होगा।

(a) 36 (b) 54

(c) 18 (d) 27 (२)

(vii) $\int x^x(1+\log x)\,dx$ का मान = ——— है।

(a) $\frac{1}{2}(1+\log x)^2+c$

(b) $x^{2x}+c$

(c) $x^x\cdot\log x+c$

(d) x^x+c (२)

(viii) रेखा $y = x$, X-अक्ष तथा रेखाओं $x = -1$ और $x = 4$ से घिरा क्षेत्रफल (area bounded) = ——— (वर्ग मीटर में) है।

(a) $\frac{2}{17}$ (b) 8

(c) $\frac{17}{2}$ (d) $\frac{1}{2}$ (२)

प्र. २. निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए : **[४]**

(i) कथन '$\exists n \in N$ इस प्रकार कि $n + 8 > 11$' का प्रतिलोम (inverse) लिखिए। (१)

(ii) $\bar{u} = 8\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$ की विपरीत दिशा (opposite direction) में एक इकाई सदिश (unit vector) लिखिए। (१)

(iii) अवकल समीकरण $\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}$ की कोटि (order) लिखिए। (१)

(iv) फलन $f(x)$, सभी $x \in R$ के लिए तीव्र वर्धमान (strictly increasing) होने की शर्त लिखिए। (१)

विभाग - ब

निम्नलिखित प्रश्नों में से किन्हीं आठ प्रश्नों को हल कीजिए : **[१६]**

प्र. ३. सत्यता सारणी (truth table) का उपयोग करके सिद्ध कीजिए कि नमूना कथन (statement patterns) $p \leftrightarrow q$ तथा $(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$ तार्किक दृष्टि से समानार्थक (logically equivalent) हैं। (२)

प्र. ४. व्यूह $\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ का सहखंडज व्यूह (adjoint) ज्ञात कीजिए। (२)

प्र. ५. $\tan^2 \theta = 1$ का सामान्य हल (general solution) ज्ञात कीजिए। (२)

प्र. ६. $x^2 - y^2 - 2x + 1 = 0$ से निरूपित होने वाली रेखाओं के प्रतिच्छेद बिंदु (point of intersection) के निर्देशांक ज्ञात कीजिए। (२)

प्र. ७. एक रेखा Y और Z अक्षों की धनात्मक दिशाओं (positive direction) के साथ 45° तथा 60° के कोण बनाती है तो रेखा का X-अक्ष की धनात्मक दिशा के साथ बनने वाला कोण ज्ञात कीजिए। (२)

प्र. ८. समतल का सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए जो स्थिति सदिश (position vector) $2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$ रखने वाले बिंदु से होकर गुजरता है तथा सदिश $2\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$ के लंबवत् (perpendicular) है। (२)

प्र. ९. संख्या 20 को दो भागों में इस तरह विभाजित कीजिए कि उनके वर्गों का योग (sum) न्यूनतम (minimum) हो। (२)

प्र. १०. मान ज्ञात कीजिए : $\int x^9 . \sec^2(x^{10}) dx$ (२)

प्र. ११. मान ज्ञात कीजिए : $\int \frac{1}{25 - 9x^2} dx$ (२)

प्र. १२. मान ज्ञात कीजिए : $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1 - \sin x} dx$ (२)

प्र. १३. परवलय (parabola) $y^2 = 16x$ तथा उसके नाभिलंब (latus rectum) से घिरे क्षेत्र (bounded region) का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। (२)

प्र. १४. माना कि X एक बस के लिए प्रतीक्षा समय (waiting time) मिनट में है तथा उसका संभाव्यता वितरण फलन (probability distribution) p.d.f.

$f(x) = \frac{1}{5}$, के लिए $0 \le x \le 5$

$= 0$, अन्यथा हो

तो संभाव्यता (probability) ज्ञात कीजिए कि :

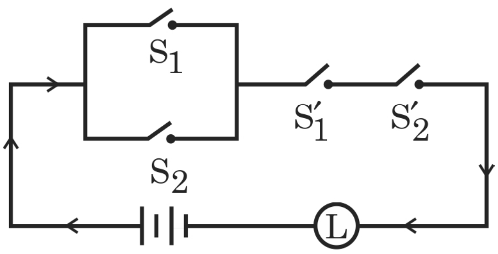
(i) प्रतीक्षा समय 1 से 3 मिनट के बीच हो

(ii) प्रतीक्षा समय 4 मिनट से अधिक हो (२)

विभाग - क

निम्नलिखित प्रश्नों में से किन्हीं आठ प्रश्नों को हल कीजिए : **[२४]**

प्र. १५. निम्नलिखित स्विच परिपथ (switching circuit) को चिन्ह के रूप में (symbolically) प्रदर्शित कीजिए। स्विचिंग सारणी (switching table) तथा इसके अर्थ को समझाइए (interpet) :



(३)

प्र. १६. सिद्ध कीजिए : $2\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)+\cos^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)=\frac{\pi}{2}$ (३)

प्र. १७. ΔABC में यदि $a = 13$, $b = 14$, $c = 15$ हो तो ज्ञात कीजिए: (i) $\sec A$ (ii) $\operatorname{cosec}\frac{A}{2}$ (३)

प्र. १८. एक रेखा बिंदुओं (6, –7, –1) तथा (2, –3, 1) से गुजरती है तो रेखा के दिक् अनुपात (direction ratios) तथा दिक् कोज्याएँ (direction cosines) ज्ञात कीजिए। सिद्ध कीजिए कि रेखा मूलबिंदु से होकर नहीं गुजरती है। (३)

प्र. १९. रेखा के कार्तेशियन तथा सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिंदु $A(1, 2, 3)$ से गुजरती है तथा दिक् अनुपात (direction ratios) 2, 3, 7 रखती है। (३)

प्र. २०. समतल (plane) का सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिंदु A (1, 1, 2), B (0, 2, 3) तथा C (4, 5, 6) से गुजरता है। (३)

प्र. २१. $Log\, x$ की n वीं घात का अवकलन (n^{th} order derivative) ज्ञात कीजिए। (३)

प्र. २२. समय t पर एक कण (particle) का विस्थापन (displacement) $s = 2t^3 - 5t^2 + 4t - 3$ से दिया जाता है तो समय, गति तथा विस्थापन ज्ञात कीजिए

यदि उसका त्वरण (acceleration) 14 ft/sec^2 हो। (३)

प्र. २३. वक्र $y = 2x^3 - x^2 + 2$ की स्पर्श रेखा तथा स्पर्शी अभिलंब (tangent and normal) के समीकरण बिंदु $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ पर ज्ञात कीजिए। (३)

प्र. २४. तीन सिक्कों को एक साथ उछाला गया, X पट (heads) की संख्या है तो X का अनुमानित मान (expected value) तथा विचरण (variance) ज्ञात कीजिए। (३)

प्र. २५. अवकल समीकरण (differential equation) $x\frac{dy}{dx} = x \cdot \tan\left(\frac{y}{x}\right) + y$ को हल कीजिए। (३)

प्र. २६. 52 ताश के पत्तों की एक भली-भांति फेंटी गई गड्डी में से 5 पत्ते उत्तरोत्तर प्रतिस्थापना सहित निकाले जाते हैं। इसकी क्या प्रायिकता (probability) है कि :

(i) सभी पाँच पत्ते हुकुम (spade) के हों?

(ii) एक भी पत्ता हुकुम का न हो? (३)

विभाग - ड

निम्नलिखित प्रश्नों में से किन्हीं पाँच प्रश्नों को हल कीजिए : **[२०]**

प्र. २७. व्यूह $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ का प्रतिलोम (inverse) प्रारंभिक पंक्ति रूपांतरण (elementary row transformation) से ज्ञात कीजिए। (४)

प्र. २८. यदि $h^2 - ab \geq 0$ है तो सिद्ध कीजिए कि x तथा y का द्विघातीय समांगी समीकरण (homogeneous equation of degree two) $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ मूल बिंदु से गुजरने वाली रेखाओं की जोड़ी को निरूपित (ज़ाहिर) करता है। अत: दर्शाइए कि समीकरण $x^2 + y^2 = 0$ दो रेखाओं को प्रस्तुत नहीं करता है। (४)

प्र. २९. माना $\overline{a}$ और $\overline{b}$ अरैखिक (non-collinear) सदिशें हैं। यदि सदिश $\overline{r}$, $\overline{a}$ तथा $\overline{b}$ के साथ प्रतलीय है तो सिद्ध कीजिए कि अद्वितीय (unique) अदिशें t_1 और t_2 इस प्रकार हैं कि $\overline{r}=t_1\overline{a}+t_2\overline{b}$ । अत: $\overline{r}=2\hat{i}+7\hat{j}+9\hat{k}$, $\overline{a}=\hat{i}+2\hat{j}$ तथा $\overline{b}=\hat{j}+3\hat{k}$ के लिए t_1 तथा t_2 के मान ज्ञात कीजिए। (४)

प्र. ३०. रेखीय योजना समस्या को आलेखीय विधि (graphically) से हल कीजिए

अधिकतम (maximize) कीजिए : $z=3x+5y$

शर्तें (subject to) : $x+4y\leq 24,$

$3x+y\leq 21,$

$x+y\leq 9,$

$x\geq 0, y\geq 0$

z का उच्चतम मूल्य (maximum value) भी ज्ञात कीजिए। (४)

प्र. ३१. यदि $x=f(t)$ तथा $y=g(t)$, t के अवकलनीय फलन (differentiable functions of t) हों इस प्रकार कि y , x का फलन हो और $\frac{dx}{dt}\neq 0$ हो तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$ अत: 7^x का x^7 के सापेक्ष अवकलन ज्ञात कीजिए। (४)

प्र. ३२. ज्ञात कीजिए : $\int e^{\sin^{-1}x}\left(\frac{x+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx$ (४)

प्र. ३३. सिद्ध कीजिए : $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(a+b-x)dx$

अत: मान ज्ञात कीजिए : $\int_0^3 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{3-x}}dx$ (४)

प्र. ३४. यदि एक वस्तु कमरे के तापमान 25°C पर 30 मिनट में 80°C से 50°C तक ठंडी होती है तो एक घंटे बाद वस्तु का तापमान (temperature) ज्ञात कीजिए। (४)

◆◆◆