

DAY — 08

SEAT NUMBER

--	--	--	--	--	--

2024 VII 25

1100

J-175

(M)

**MATHEMATICS & STATISTICS (40)**  
**(ARTS & SCIENCE)**

Time : 3 Hrs.

(8 Pages)

Max. Marks : 80

**सर्वसामान्य सूचना :** प्रश्नपत्रिकेमध्ये एकूण ३४ प्रश्न आहेत आणि चार विभागांत विभागलेली आहे.

- (१) **विभाग अ** – प्रश्न क्रमांक १ मध्ये एकूण ८ बहुपर्यायी प्रश्न प्रत्येकी दोन गुणांचे आहेत.  
प्रश्न क्रमांक २ मध्ये अतिलघू उत्तरांचे एकूण चार प्रश्न प्रत्येकी एक गुणाचे आहेत.
- (२) **विभाग ब** – प्रश्न क्रमांक ३ ते प्रश्न क्रमांक १४ प्रत्येकी दोन गुणांचे लघूत्तरी बारा प्रश्न आहेत. (कोणतेही आठ प्रश्न सोडवा.)
- (३) **विभाग क** – प्रश्न क्रमांक १५ ते प्रश्न क्रमांक २६ प्रत्येकी तीन गुणांचे लघूत्तरी बारा प्रश्न आहेत. (कोणतेही आठ प्रश्न सोडवा.)
- (४) **विभाग ड** – प्रश्न क्रमांक २७ ते प्रश्न क्रमांक ३४ प्रत्येकी चार गुणांचे दीर्घोत्तरी आठ प्रश्न आहेत. (कोणतेही पाच प्रश्न सोडवा)
- (५) लॉग टेबलचा वापर करण्यास परवानगी आहे. गणनयंत्राचा (calculator) वापर करण्यास परवानगी नाही.
- (६) उजव्या बाजूस दिलेल्या संख्या प्रश्नांचे पूर्ण गुण दर्शवितात.
- (७) आलेख कागदाचा वापर अनिवार्य नाही. फक्त कच्चा आलेख काढणे अपेक्षित आहे.
- (८) बहुपर्यायी प्रश्नांचे उत्तरे त्यांच्या संकेताक्षरांसह लिहिणे आवश्यक आहे.  
उदा. : (अ)..... / (ब)..... / (क)..... / (ड).....  
केवळ योग्य उत्तर किंवा त्याचे अक्षर (alphabet) लिहिल्यास गुण दिले जाणार नाहीत. बहुपर्यायी प्रश्नांचे मूल्यमापन हे पहिल्या प्रयत्नात सोडवलेल्या प्रश्नांसाठीच करण्यात येईल.
- (९) प्रत्येक विभागाची सुरुवात नवीन पानावर करावी.

0 1 7 5

Page 1

P.T.O.

## विभाग - अ

प्र. १. प्रत्येक उपप्रश्नासाठी खाली दिलेल्या पर्यायी उत्तरातून योग्य तो पर्याय निवडून खालील प्रश्नांची उत्तरे लिहा : [१६]

(i)  $\cos\left[\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right] = \text{---}$

(अ)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(ब)  $\frac{1}{2}$

(क)  $\frac{1}{\sqrt{2}}$

(ड)  $\frac{\pi}{4}$

(२)

(ii) जर  $\theta$  हा कोणत्याही दोन  $\vec{a}$  आणि  $\vec{b}$  या सदिशांमधील कोन असेल व  $|\vec{a} \cdot \vec{b}| = |\vec{a} \times \vec{b}|$  तर  $\theta = \text{---}$

(अ) 0

(ब)  $\frac{\pi}{4}$  or  $\frac{3\pi}{4}$

(क)  $\frac{\pi}{2}$

(ड)  $\pi$  or  $\frac{\pi}{6}$

(२)

(iii)  $\vec{r} = (\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}) + \lambda(3\hat{i} + 2\hat{j} + 6\hat{k})$  आणि

$$\vec{r} = (5\hat{i} - 2\hat{j} + 7\hat{k}) + \mu(\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k})$$

या रेषांमधील कोन --- आहे.

(अ)  $\cos^{-1}\left(\frac{17}{21}\right)$

(ब)  $\cos^{-1}\left(\frac{20}{21}\right)$

(क)  $\cos^{-1}\left(\frac{18}{21}\right)$

(ड)  $\cos^{-1}\left(\frac{19}{21}\right)$

(२)

(iv)  $\vec{r} \cdot (2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}) = 5$  या प्रतलाचे आरंभबिंदू पासूनचे लंबांतर (perpendicular distance) --- आहे.

(अ)  $\frac{5}{\sqrt{14}}$  एकक

(ब)  $\frac{5}{14}$  एकक

(क) 5 एकक

(ड)  $\frac{\sqrt{14}}{5}$  एकक

(२)

(v) जर  $x = e^{\frac{x}{y}}$  तर  $\frac{dy}{dx} = \text{---}$

(अ)  $1 - \frac{y}{x}$

(ब)  $1 + \frac{y}{x}$

(क)  $\frac{x-y}{x \log x}$

(ड)  $\frac{x+y}{x \log x}$

(२)

(vi) --- ची उकल (solution)  $y = c^2 + \frac{c}{x}$  आहे.

(अ)  $x^4 \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 - x \frac{dy}{dx} - y = 0$

(ब)  $x^2 \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 + y = 0$

(क)  $x^3 \left( \frac{d^2y}{dx^2} \right) - x \frac{dy}{dx} + y = 0$

(ड)  $x \frac{d^2y}{dx^2} = 4y$

(२)

(vii)  $X \sim B(n, p)$  दिलेले असताना जर  $n = 10$  आणि  $p = 0.4$  असेल तर अनुक्रमे  $E(X)$  आणि  $Var(X)$  --- आहेत.

(अ) 4, 0.24

(ब) 0.4, 0.24

(क) 4, 2.4

(ड) 3, 0.24

(२)

(viii)  $1^\circ = 0.0175^\circ$  दिले असता  $\tan(44^\circ 30')$  चे अंदाजे मूल्य (approximate value) --- आहे.

(अ) 0.8952

(ब) 0.9528

(क) 0.9285

(ड) 0.9825

(२)

प्र. २. खालील प्रश्नांची उत्तरे लिहा : [ ४ ]

(i)  $2x + y = 0$  आणि  $3x - y = 0$  या रेखायुग्माचे एकत्रित समीकरण (combined equation) काढा. (१)

(ii)  $\sin^{-1}\left(\sin\frac{5\pi}{3}\right)$  ची किंमत काढा. (१)

(iii) सोडवा :  $\int \frac{5^x}{3^x} dx$  (१)

(iv)  $\frac{dy}{dx} + y = e^{-x}$  या विकलन समीकरणाचे संकलन गुणक (integrating factor) लिहा. (१)

### विभाग - ब

खालीलपैकी कोणतेही आठ प्रश्न सोडवा : [ १६ ]

प्र. ३. जर  $p, q$  ही विधाने सत्य आहेत आणि  $r, s$  ही विधाने असत्य आहेत, तर  $(q \wedge r) \vee (\sim p \wedge s)$  या विधानाचे सत्यता मूल्य शोधा. (२)

प्र. ४. प्राथमिक पंक्ती परिवर्तनाने (elementary row transformation)  $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$  या सारणीचा (matrix) व्यस्त (inverse) काढा. (२)

प्र. ५. ज्या बिंदूचे कार्तीयन निर्देशक (cartesian co-ordinates)  $(1, -\sqrt{3})$  आहेत, त्या बिंदूचे ध्रुवीय निर्देशक (polar co-ordinates) काढा. (२)

प्र. ६.  $xy + y^2 = 0$  या समीकरणाने दर्शविलेल्या रेषांमधील लघुकोन (acute angle) काढा. (२)

प्र. ७. सत्यता सारणीचा उपयोग करून  $p \rightarrow (q \rightarrow p)$  हे पुनरुक्ती (tautology) विधान आहे हे दाखवा. (२)

प्र. ८. जर  $\tan^{-1}(2x) + \tan^{-1}(3x) = \frac{\pi}{4}$  तर  $x$  ची किंमत काढा, जेव्हा  $0 < 3x < 1$  असेल. (२)

प्र. ९. जर  $y = x^3 - 6x^2 + x + 3$  या वक्राच्या स्पर्शिका  $y = x + 5$  या रेषेस समांतर आहेत, तर वक्रावरील स्पर्श बिंदू काढा. (२)

प्र. १०. सोडवा :  $\int \frac{e^x(1+x)dx}{\sin^2(xe^x)}$  (२)

प्र. ११. एका कणाचे (particle) 't' या वेळेला  $s = 2t^3 - 5t^2 + 4t - 3$  हे विस्थापन (displacement) दिले आहे. जेव्हा त्वरण (acceleration)  $14 \text{ ft/sec}^2$  आहे. तेव्हा वेळ (time) काढा. (२)

प्र. १२. सोडवा :  $\int_0^{\pi/4} \sqrt{1 + \sin 2x} dx$  (२)

प्र. १३. X चे संभाव्यता वितरण (probability distribution) खालील प्रमाणे आहे.

$X = x$	0	1	2	3	4
$P(X = x)$	0.1	k	2k	2k	k

तर (अ) k

(ब)  $P(X < 2)$  काढा. (२)

प्र. १४.  $r \frac{dr}{d\theta} + \cos \theta = 5$  चे  $r = \sqrt{2}$  आणि  $\theta = 0$  ला विशिष्ट उत्तर (particular solution) काढा. (२)

## विभाग - क

खालीलपैकी कोणतेही आठ प्रश्न सोडवा : [ २४ ]

प्र. १५.  $\triangle ABC$  मध्ये, जर  $a \cos A = b \cos B$  असेल, तर तो त्रिकोण काटकोन किंवा समद्विभुज त्रिकोण आहे. हे सिद्ध करा. (३)

प्र. १६.  $A(1, -1, 1), B(-1, 1, 1), C(1, 1, 1)$  आणि  $D(2, -3, 4)$  हे चार बिंदू एकप्रतलीय आहेत का? तुमचे उत्तर स्पष्ट (Justify) करा. (३)

- प्र. १७.  $(\tan^2 \theta + \cos^2 \theta)x^2 - 2xy \tan \theta + (\sin^2 \theta)y^2 = 0$  या समीकरणाने प्रदर्शित केलेल्या रेषांच्या चढांमधील फरक काढा. (३)
- प्र. १८.  $(\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k})$  या बिंदूमधून जाणारी आणि  $\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$  व  $2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$  या सदिशांना लंब असणाऱ्या रेषेचे सदिश समीकरण (vector equation) काढा. (३)
- प्र. १९. समजा  $\bar{a}$  आणि  $\bar{b}$  हे नैकरेषीय सदिश आहेत. सिद्ध करा की, सदिश  $\bar{r}$  हा  $\bar{a}$  आणि  $\bar{b}$  सोबत एक प्रतलीय आहे तर आणि फक्त तर (if and only if)  $t_1$  व  $t_2$  असे एकमेव अदिश आहेत की  $\bar{r} = t_1 \bar{a} + t_2 \bar{b}$  यावरून जर  $\bar{r} = \hat{i} + \hat{j}$ ,  $\bar{a} = 2\hat{i} - \hat{j}$ ,  $\bar{b} = \hat{i} - 2\hat{j}$  तर  $t_1$  व  $t_2$  ची किंमती काढा. (३)
- प्र. २०.  $x + 2y + 3z + 4 = 0$  आणि  $4x + 3y + 2z + 1 = 0$  या प्रतलांच्या छेदातून व आरंभबिंदूतून (origin) जाणाऱ्या प्रतलाचे (plane) समीकरण काढा. (३)
- प्र. २१. जर  $y = \tan^{-1} \left( \sqrt{\frac{3-x}{3+x}} \right)$  तर  $\frac{dy}{dx}$  काढा. (३)
- प्र. २२.  $f(x) = x^3 + 5x^2 - 2x + 3$  ची  $x = 1.98$  ला अंदाजे मूल्य (approximate value) काढा. (३)
- प्र. २३. सोडवा :  $\int \frac{\sin(x+a)}{\cos(x-b)} dx$  (३)
- प्र. २४.  $dr + (2r \cot \theta + \sin 2\theta) d\theta = 0$  हे विकलनीय समीकरण (differential equation) सोडवा. (३)
- प्र. २५. समजा  $X \sim B(10, 0.2)$ , तर काढा.  
 (अ)  $P(X = 1)$   
 (ब)  $P(X \geq 1)$  (३)

प्र. २६.  $X$  ह्या अनिर्बंध चलाचे (r.v.) संभवनीयता राशीफल (PMF) खालीलप्रमाणे दिले आहे.

$X = x$	1	2	3
$P(X)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$

तर  $X$  चे अपेक्षित मूल्य (expected value), विचरण (variance) आणि प्रमाणित विचलन (standard deviation) काढा.

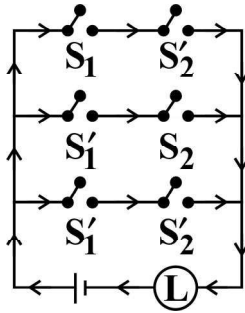
(३)

### विभाग - ड

खालीलपैकी कोणतेही पाच प्रश्न सोडवा :

[ २० ]

प्र. २७. खालील परिपथाला (circuit) पर्यायी व्यवस्था (alternative arrangement) द्या की, नवीन परिपथाला कमीतकमी (minimum) बटने (switches) असतील.



(४)

प्र. २८. जर  $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$  तर संलग्न पद्धतीने (adjoint method)  $A^{-1}$  काढा. (४)

प्र. २९.  $\Delta ABC$  मध्ये,  $D$  आणि  $E$  बिंदू  $BC$  व  $AC$  वर अनुक्रमे आहेत. जसे  $BD = 2DC$  आणि  $AE = 3EC$ . समजा  $P$  हा बिंदू  $AD$  व  $BE$  चा छेदन बिंदू (point of intersection) असेल तर सदिश पद्धतीने (vector method)  $\frac{BP}{PE}$  हे

गुणोत्तर (ratio) काढा.

(४)

प्र. ३०. एक निर्माता  $A$  आणि  $B$  अशी दोन उत्पादने तयार करतो. त्यावर प्रत्येक एककाला अनुक्रमे ₹3 व ₹4 नफा (profit) मिळवितो. प्रत्येक उत्पादन दोन मशीन  $M_1$  आणि  $M_2$  यांवर तयार होते. उत्पादन  $A$  तयार करण्यासाठी मशीन  $M_1$  वर एक मिनिट वेळ आणि मशीन  $M_2$  वर 2 मिनिटे वेळ लागतो. तसेच, उत्पादन  $B$  तयार करण्यासाठी मशीन  $M_1$  वर एक मिनिट आणि मशीन  $M_2$  वर 1 मिनिट इतका वेळ लागतो. कोणत्याही कामाच्या दिवशी मशीन  $M_1$  हे वापरासाठी 450 मिनिटापेक्षा जास्त वेळ उपलब्ध नाही. त्यावेळेस, मशीन  $M_2$  हे वापरासाठी 600 मिनिटासाठी उपलब्ध आहे. जास्तीत जास्त (कमाल) नफा मिळविण्यासाठी  $A$  आणि  $B$  चे किती एकक उत्पादन घ्यावे लागेल ते काढा. (४)

प्र. ३१. जर  $y = f(u)$ , हे  $u$  चे विकलनीय फल (differentiable function) आहे. आणि  $u = g(x)$  हे  $x$  चे विकलनीय फल आहे. असे की  $y = f[g(x)]$  हे संयुक्त फल (composite function)  $x$  चे विकलनीय फल आहे. तर सिद्ध करा –

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}, \text{ यावरून } \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{\sqrt{\sin x}} \right) \text{ काढा.} \quad (४)$$

प्र. ३२. सोडवा :  $\int x^2 \sin 3x dx$ . (४)

प्र. ३३. सिद्ध करा :

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx, \text{ जर } f \text{ सम फल आहे. (even function)}$$

$$= 0, \text{ जर } f \text{ विषम फल आहे. (odd function)}$$

$$\text{यावरून } \int_{-1}^1 \tan^{-1} x dx \text{ ची किंमत काढा.} \quad (४)$$

प्र. ३४.  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  या विवृत्ताचे (ellipse) चे क्षेत्रफल (area) काढा.

$$\text{यावरून } \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1 \text{ चे क्षेत्रफल काढा.} \quad (४)$$

