

DAY — 08

SEAT NUMBER

--	--	--	--	--	--

2025 VII 03

1100

J-385

(M)

MATHEMATICS & STATISTICS (40)
(ARTS & SCIENCE)

Time : 3 Hrs.

(8 Pages)

Max. Marks : 80

सूचना :

प्रश्नपत्रिका एकूण चार विभागांत विभागलेली आहे.

- (१) विभाग अ- प्रश्न क्रमांक १ मध्ये ८ बहुपर्यायी प्रश्न प्रत्येकी २ गुणांचे आहेत.
प्रश्न क्रमांक २ मध्ये ४ उपप्रश्न प्रत्येकी १ गुणाचे आहेत.
- (२) विभाग ब - प्रश्न क्रमांक ३ ते प्रश्न क्रमांक १४ मध्ये १२ लघूत्तरी प्रश्न आहेत, त्यांना प्रत्येकी २ गुण आहेत. (कोणतेही ८ प्रश्न सोडवा.)
- (३) विभाग क- प्रश्न क्रमांक १५ ते प्रश्न क्रमांक २६ मध्ये १२ लघूत्तरी प्रश्न आहेत, त्यांना प्रत्येकी ३ गुण आहेत. (कोणतेही ८ प्रश्न सोडवा.)
- (४) विभाग ड- प्रश्न क्रमांक २७ ते प्रश्न क्रमांक ३४ मध्ये ८ दीर्घोत्तरी प्रश्न आहेत, त्यांना प्रत्येकी ४ गुण आहेत. (कोणतेही ५ प्रश्न सोडवा.)
- (५) लॉग टेबलचा वापर करण्यास परवानगी आहे. गणनयंत्राचा वापर करण्यास परवानगी नाही.
- (६) उजव्या बाजूस दिलेल्या संख्या प्रश्नांचे पूर्ण गुण दर्शवितात.
- (७) आलेख कागदाचा वापर अनिवार्य नाही. फक्त कच्चा आलेख काढणे अपेक्षित आहे.
- (८) बहुपर्यायी प्रश्नांचे मूल्यमापन हे पहिल्या प्रयत्नात सोडविलेल्या प्रश्नांसाठीच करण्यात येईल. अन्यथा गुण दिले जाणार नाहीत.
- (९) प्रत्येक विभागाची सुरुवात नवीन पानावर करावी.

विभाग - अ

प्र. १. खाली दिलेल्या बहुपर्यायी प्रकारच्या प्रश्नांखाली दिलेल्या पर्यायांमधून योग्य उत्तर निवडून लिहा :

[१६]

(i) $(p \vee q) \rightarrow (p \wedge q)$ या विधानाचा (statement pattern) व्यस्त (inverse) आहे.

(a) $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$

(b) $\sim (p \vee q) \rightarrow (p \wedge q)$

(c) $(\sim p \wedge \sim q) \rightarrow (\sim p \vee \sim q)$

(d) $(\sim p \vee \sim q) \rightarrow (\sim p \wedge \sim q)$ (२)

(ii) $\triangle ABC$ मध्ये, जर $a = 2, b = 3$ आणि $\sin A = \frac{2}{3}$, तर $\angle B = \dots\dots$

(a) $\frac{\pi}{2}$

(b) $\frac{\pi}{3}$

(c) $\frac{\pi}{4}$

(d) $\frac{\pi}{6}$ (२)

(iii) जर $\overline{AB} = 2\hat{i} - 4\hat{j} + 7\hat{k}$ आणि आरंभबिंदू $A \equiv (1, 5, 0)$ तर टोकाचा बिंदू $B = \dots\dots$ आहे.

(a) (1, 3, 7)

(b) (7, 3, 1)

(c) (1, 7, 3)

(d) (3, 1, 7) (२)

(iv) रेषा $\vec{r} = (\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}) + \lambda(2\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k})$

आणि $\vec{r} = (\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}) + \mu(\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k})$ यामधील कोन आहे.

(a) $\frac{\pi}{4}$

(b) $\frac{\pi}{2}$

(c) $\frac{\pi}{3}$

(d) 0 (२)

- (v) जर y हे x या चलाचे फल आहे आणि $\log(x + y) = xy$ तर $x = 0$ ह्या किंमतीसाठी $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ ची किंमत असेल.
- (a) 1 (b) -1
(c) 2 (d) 0 (२)
- (vi) वेळ t असताना, एका कणाचे (particle) विस्थापन (displacement) $S = 2t^3 - 5t^2 + 4t - 3$ दिलेले आहे, तर वेळ $t = 1$ असतांना त्या कणाचे त्वरण असेल
- (a) 2 (b) 8
(c) 10 (d) 14 (२)
- (vii) $\sec^2 x \cdot \tan y dx + \sec^2 y \cdot \tan x dy = 0$ या विकलनीय समीकरणाची (differential equation) उकल आहे.
- (a) $\tan x \cdot \cot y = c$
(b) $\cot x - \cot y = c$
(c) $\tan x \cdot \tan y = c$
(d) $\cot x - \tan y = c$ (२)
- (viii) समजा X : बससाठी प्रतिक्षा वेळ मिनिटात आहे आणि संभाव्यता घनता फल (p.d.f.) आहे.
- $$f(x) = \frac{1}{5}; \text{जेव्हा } 0 \leq x \leq 5.$$
- $$= 0; \text{ अन्यथा}$$
- तर 1 आणि 3 या दरम्यान प्रतिक्षा वेळेची संभाव्यता असेल.
- (a) $\frac{1}{5}$ (b) $\frac{2}{5}$
(c) $\frac{3}{5}$ (d) $\frac{4}{5}$ (२)

प्र. २. खालील प्रश्नांची उत्तरे लिहा : [४]

(i) $\tan \theta = 0$ या समीकरणाची व्यापक उकल (general solution) काढा. (१)

(ii) सदिश (vector) $\vec{a} = 3\hat{i} + \hat{j} + 7\hat{k}$ चे परिमाण (magnitude) काढा. (१)

(iii) जर $y = \sin(\log x)$ तर $\frac{dy}{dx}$ काढा. (१)

(iv) सोडवा $\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ (१)

विभाग - ब

खालीलपैकी कोणतेही आठ प्रश्न सोडवा : [१६]

प्र. ३. सत्यता सारणीचा (truth-table) वापर करून सिद्ध करा :
 $\sim p \wedge q \equiv (p \vee q) \wedge \sim p$ (२)

प्र. ४. $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ या सारणीच्या (matrix) घटकांचे (elements) सहगुणक (cofactors) काढा. (२)

प्र. ५. $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ या कार्तीय निर्देशक (cartesian co-ordinates) असलेल्या बिंदूचे ध्रुवीय निर्देशक (polar co-ordinates) काढा. (२)

प्र. ६. ΔABC मध्ये, जर $a = 2, b = 3, c = 4$ तर सिद्ध करा की, ΔABC हा विशाल कोन त्रिकोण आहे. (२)

प्र. ७. जर $\vec{a} = 3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}, \vec{b} = 2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$, तर $|\vec{a} \times \vec{b}|$ काढा. (२)

प्र. ८. $A(-1, 2, 3)$ या बिंदूमधून जाणाऱ्या प्रतलाचे व ज्याच्या स्तंभिकेचे (normal) दिक् अनुपात (direction ratios) 0, 2, 5 आहेत. त्या प्रतलाचे (plane) कार्तीय समीकरण (cartesian equation) काढा. (२)

- प्र. ९. जर $x\sqrt{x} + y\sqrt{y} = a\sqrt{a}$ तर $\frac{dy}{dx}$ काढा. (२)
- प्र. १०. सिद्ध करा की $y = x^3 - 6x^2 + x + 3$ या वक्राची (0, 3) या बिंदूतून जाणारी स्पर्शिका (tangent) $y = x + 5$ या रेषेला समांतर आहे. (२)
- प्र. ११. $f(x) = x^2 - 4x + 3$ ह्या फलासाठी $x \in [1, 3]$ या अंतराळात रोलेज प्रमेयाच्या (Rolle's theorem) अटी तपासा. (२)
- प्र. १२. सोडवा : $\int \frac{dx}{x + x^{-10}}$ (२)
- प्र. १३. सोडवा : $\int_0^{-1} e^{-x} dx$ (२)
- प्र. १४. जर $X \sim B(n, p)$ व $E(X) = 6, Var(X) = 4.2$, तर n आणि p काढा. (२)

विभाग - क

खालीलपैकी कोणतेही आठ प्रश्न सोडवा :

[२४]

- प्र. १५. ΔABC मध्ये, सिद्ध करा
 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ (३)
- प्र. १६. (2, 3) या बिंदूमधून जाणाऱ्या आणि $3x + 2y - 1 = 0$ व $x - 3y + 2 = 0$ या रेषांना लंब असणाऱ्या दोन रेषांचे संयुक्त समीकरण काढा. (३)
- प्र. १७. जर $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ या समीकरणाने दर्शविलेल्या रेषांमधील लघुकोन θ आहे तर सिद्ध करा की,

$$\tan \theta = \left| \frac{2\sqrt{h^2 - ab}}{a + b} \right| \quad (३)$$

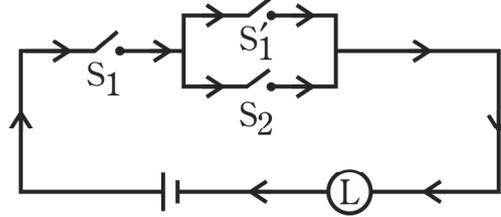
- प्र. १८. त्रिकोणाच्या मध्यगा (medians) एकसंपाती (concurrent) असतात, हे सदिश पद्धतीने सिद्ध करा. (३)
- प्र. १९. $A(-1, 2, -5)$ या बिंदूमधून जाणारे आणि सदिश (vector) $4\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$ व $\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$ यांना समांतर (parallel) असणाऱ्या प्रतलाचे (plane) सदिश समीकरण (vector equation) काढा. (३)
- प्र. २०. $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4}$ व $\frac{x-2}{3} = \frac{y-4}{4} = \frac{z-5}{5}$ या रेषांमधील किमान अंतर (shortest distance) काढा. (३)
- प्र. २१. एका दंडगोलाकृती पात्राची (cylindrical vessel) तळत्रिज्या (base radius) ३ मीटर आहे. यामध्ये $27 \text{ m}^3/\text{सेकंद}$ या दराने पाणी ओतले असता, पाण्याची पातळी वाढण्याचा (rising) दर काढा. (३)
- प्र. २२. सोडवा : $\int \frac{\sin(x+a)}{\cos(x-b)} dx$ (३)
- प्र. २३. $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = x^3 - 3$ हे विकलनीय समीकरण (differential equation) सोडवा. (३)
- प्र. २४. $y = c_1 \cos(\log x) + c_2 \sin(\log x)$ या समीकरणातील यादृच्छिक स्थिरांकांचे (arbitrary constants) विलोपन (eliminating) करून विकलनीय समीकरण (differential equation) मिळवा. (३)
- प्र. २५. X चे संभाव्यता वितरण खालीलप्रमाणे आहे :
- | | | | | | |
|----------|-----|-----|------|------|-----|
| x | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| $P[X=x]$ | 0.1 | k | $2k$ | $2k$ | k |
- शोधा - (i) k (ii) $P(X < 2)$ (iii) $P[1 \leq X < 4]$ (३)
- प्र. २६. पाच प्रश्नांपैकी प्रत्येकासाठी तीन संभाव्य उत्तरांसह बहुपर्यायी परीक्षेत विद्यार्थ्याला फक्त अंदाज करून चार अचूक उत्तरे मिळण्याची संभाव्यता किती आहे? (३)

विभाग - ड

खालीलपैकी कोणतेही पाच प्रश्न सोडवा :

[२०]

- प्र. २७. खालील विद्युत परीपथ (switching circuit) साठी पर्यायी समतुल्य (alternative equivalent) सरळ परिक्रमा (simple circuit) लिहा.



(४)

- प्र. २८. तीन संख्यांची बेरीज २ आहे. पहिल्या आणि तिसऱ्या संख्येच्या बेरजेमध्ये दुसऱ्या संख्येची दुप्पट मिळविल्यास आपल्याला ० (शून्य) मिळेल, दुसऱ्या आणि तिसऱ्या संख्येच्या बेरजेच्या दुप्पटीत पहिल्या संख्येची पाचपट मिळविल्यास ७ मिळेल. सारणी पद्धतीचा (matrix method) वापर करून संख्या शोधा.

(४)

- प्र. २९. सदिश - त्रयीचा अदिश गुणाकार (scalar triple product) गुणधर्म (properties) वापरून सिद्ध करा.

$$[\bar{a} + \bar{b} \quad \bar{b} + \bar{c} \quad \bar{c} + \bar{a}] = 2[\bar{a} \bar{b} \bar{c}]$$

(४)

- प्र. ३०. खालील रेषीय प्रयोजनात्मक प्रश्न (L.P.P.) आलेखीय पद्धतीने सोडवा :

कमाल (maximize) : $z = 9x + 13y$

अटी : $2x + 3y \leq 18,$

$2x + y \leq 10$

$x \geq 0, y \geq 0$

(४)

- प्र. ३१. जर $x = f(t)$ आणि $y = g(t)$ हे t चे विकलनीय फल (differentiable function) जसे की y हे x चे फल आहे आणि $\frac{dx}{dt} \neq 0$, तर सिद्ध करा की :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}},$$

यावरून, जर $y = at^2$ आणि $x = 2at$ तर $\frac{dy}{dx}$ काढा.

(४)

प्र. ३२. सिद्ध करा

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} \cdot dx = \frac{x}{2} \cdot \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \cdot \sin^{-1} \left(\frac{x}{a} \right) + c \quad (४)$$

प्र. ३३. सोडवा :

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{(1-2x^2) \cdot \sqrt{1-x^2}} \quad (४)$$

प्र. ३४. $y^2 = 4x$ आणि $x^2 = 4y$ या अन्वस्तांमधील (parabolas) तयार होणाऱ्या सामाईक भागाचे (region) क्षेत्रफळ (area) काढा. (४)

